

Voici une leçon conçue avec l'aide de jeunes professeurs de LP, dans le cadre d'une action Mafpen, et expérimentée avec des élèves de 1^{re} de BEP en activités en partie différenciées : un groupe d'élèves a travaillé sur les activités 2, 3 et 6, et un autre groupe sur les activités 4, 5 et 7. Les groupes ont eu la totalité des documents au moment de la correction et de la synthèse.

ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Activité préliminaire 1 : pour bien démarrer.

Soit le plan muni du repère orthonormal de la figure 1.

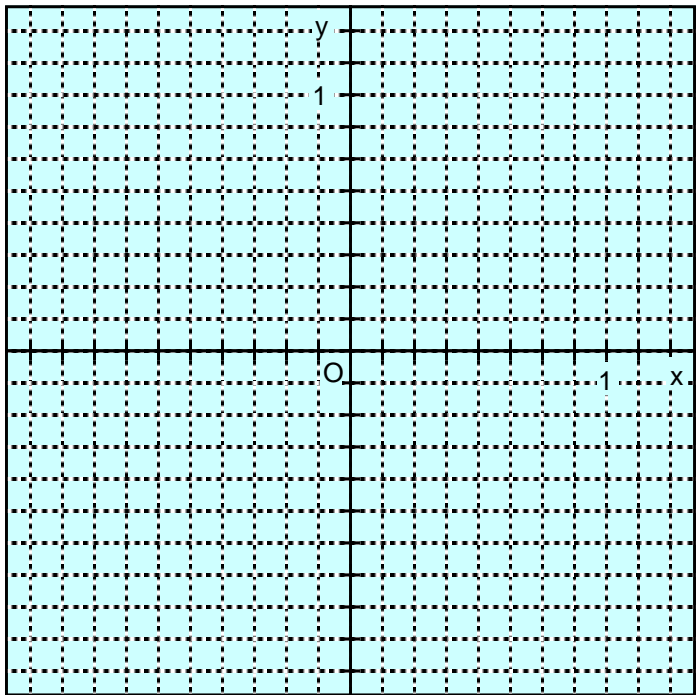


fig 1

1. Tracer, en figure 1, le cercle trigonométrique de centre O.
2. Placer le point A(1;0).
3. Placer un point quelconque M(x_M;y_M) sur le cercle trigonométrique.
4. Indiquer sur la figure 1 le sens trigonométrique considéré comme positif.
5. Repérer sur la figure 1 l'angle (\vec{OA}, \vec{OM}) par sa mesure α , en degrés. Mesurer α à l'aide du rapporteur. Convertir en radians arrondis au centième, sachant que $180^\circ = \pi$ rad.

.....
 6. Que signifie l'affirmation : α est la mesure principale de l'angle (\vec{OA}, \vec{OM}) ?

7. Que représente l'abscisse x_M du point M dans le cercle trigonométrique, par rapport à la mesure de l'angle (\vec{OA}, \vec{OM}) ?.....

Donner un encadrement de ce nombre :

8. Que représente l'ordonnée y_M du point M dans le cercle trigonométrique, par rapport à la mesure de l'angle (\vec{OA}, \vec{OM}) ?.....

Donner un encadrement de ce nombre :

9. Comment appelle-t-on dans la pratique l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées?
 axe des abscisses :
 axe des ordonnées :

10. Écrire, autour du cercle trigonométrique, les nombres $\{ \text{INCORPORER "Equation" * fusionformat} \}$, π , $\{ \text{INCORPORER "Equation" * fusionformat} \}$ et $-\pi$.

Activité préliminaire 2 : ce que fait la calculatrice.

Soit l'équation trigonométrique : $\cos(x) = 0,760$ où x est un nombre réel, mesure d'un angle, en degrés. Résoudre à la calculatrice cette équation et arrondir au dixième : pour cela, expliquer la méthodologie utilisée étape par étape, à l'image de l'étape a) suivante.

- a) Je mets ma calculatrice en mode degré.
- b)
- c)
-

Activité préliminaire 3 : position d'une droite par rapport à un cercle.

1. Tracer, en figure 2, un cercle quelconque de centre O, de rayon inférieur ou égal à 3 cm, ainsi que son diamètre horizontal et son diamètre vertical.

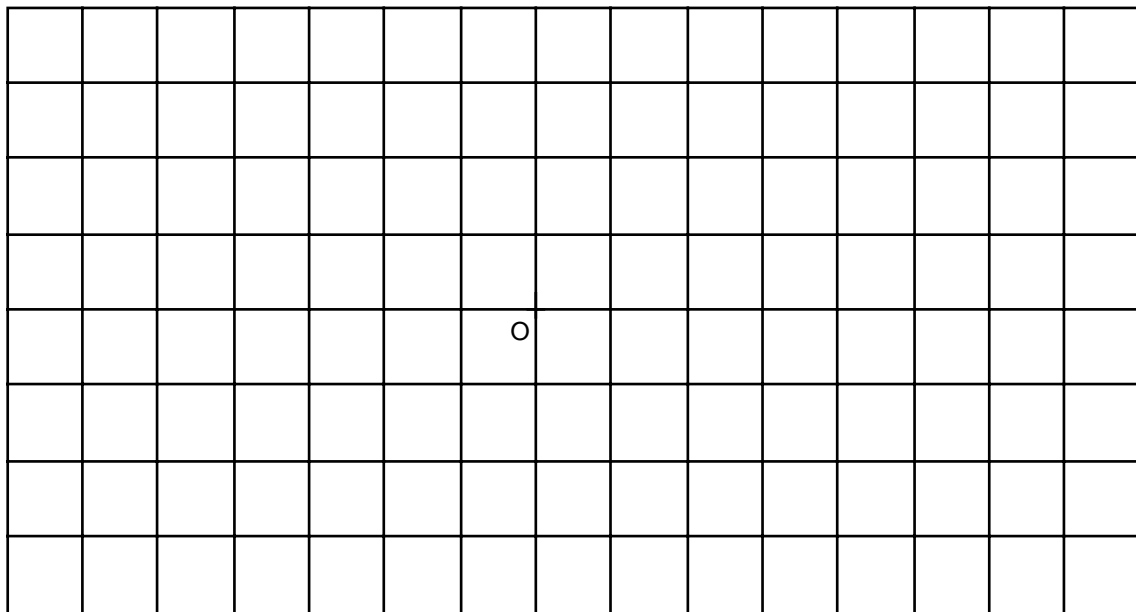


fig 2

- 2. Tracer plusieurs droites parallèles au diamètre vertical.
- 3. Quelles sont toutes les positions possibles de ces droites par rapport au cercle?

.....
.....
.....

4. Déterminer le nombre de points d'intersection entre le cercle et chacune de ces droites.

.....
.....
.....

Activité préliminaire 4 : ce que fait la calculatrice.

Soit l'équation trigonométrique : $\sin(x) = 0,609$ où x est un nombre réel, mesure d'un angle, en degrés
Résoudre à la calculatrice cette équation et arrondir au dixième : pour cela, expliquer la méthodologie utilisée étape par étape, à l'image de l'étape a) suivante.

a) Je mets ma calculatrice en mode degré.

b)

c)

.....

Activité préliminaire 5: position d'une droite par rapport à un cercle.

1. Tracer, en figure 3, un cercle quelconque de centre O, de rayon inférieur ou égal à 3 cm, ainsi que son diamètre horizontal et son diamètre vertical.

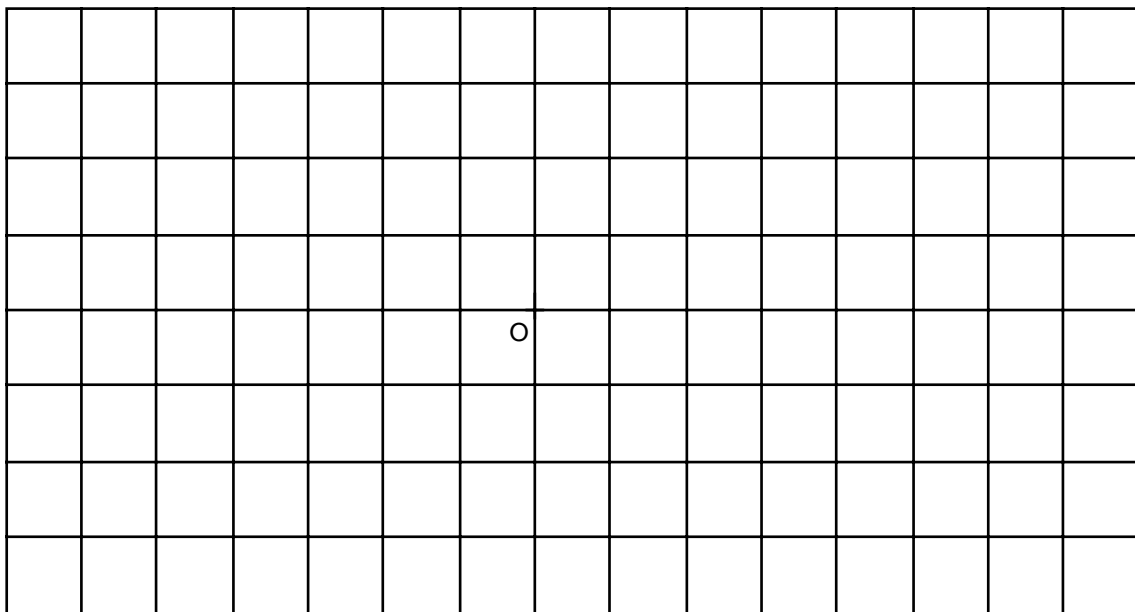


fig 3

2. Tracer plusieurs droites parallèles au diamètre horizontal.

3. Quelles sont toutes les positions possibles de ces droites par rapport au cercle?

.....

4. Déterminer le nombre de points d'intersection entre le cercle et chacune de ces droites.

.....

Activité 6: résolution graphique d'une équation du type $\cos(x) = a$, où x est la mesure, en radian d'un angle.
 Soit en figure 4 le plan muni du repère orthonormal (O, \vec{OA}, \vec{OB}) et le cercle trigonométrique associé.

fig 4

1. S'aider des activités préliminaires pour résoudre graphiquement les équations suivantes sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$: $\cos(x) = 0,8$; $\cos(x) = 1$; $\cos(x) = -0,5$; $\cos(x) = 2$; $\cos(x) = 0$.
 Faire apparaître les traits de construction.
2. Résumer les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Équations	Valeurs des angles, lues en degrés	Ensemble des solutions sur $]-\pi; \pi]$
$\cos(x) = 0,8$		
$\cos(x) = 1$		
$\cos(x) = -0,5$		
$\cos(x) = 2$		
$\cos(x) = 0$		

3. Traiter ces équations à la calculatrice au brouillon, et conclure quant aux capacités de la calculatrice.

4. Dans le cas où il y a deux solutions, comparer ces solutions.

5. Si on appelait α l'une des deux solutions, comment s'écrirait l'autre solution en fonction de la première?

Activité 7: résolution graphique d'une équation du type $\sin(x) = b$, où x est la mesure, en radian d'un angle.

Soit en figure 5 le plan muni du repère orthonormal (O, \vec{OA}, \vec{OB}) et le cercle trigonométrique associé.

fig 5

1. S'aider des activités préliminaires pour résoudre graphiquement les équations suivantes sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$: $\sin(x) = 0,4$; $\sin(x) = 1$; $\sin(x) = -0,5$; $\sin(x) = 1,5$; $\sin(x) = 0$.

Faire apparaître les traits de construction.

2. Résumer les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Équations	Valeurs des angles, lues en degrés	Ensemble des solutions sur $]-\pi ; \pi]$
$\sin(x) = 0,4$		
$\sin(x) = 1$		
$\sin(x) = -0,5$		
$\sin(x) = 1,5$		
$\sin(x) = 0$		

3. Traiter ces équations à la calculatrice au brouillon, et conclure quant aux capacités de la calculatrice.

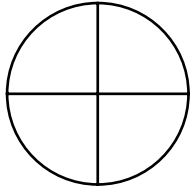
4. Dans le cas où il y a deux solutions, comparer ces solutions.

5. Si on appelait α l'une des deux solutions, comment s'écrirait l'autre solution en fonction de la première?

CE QU'IL FAUT RETENIR

Résolution sur $]-\pi;\pi]$ des équations trigonométriques du type :

$\cos(x) = a$



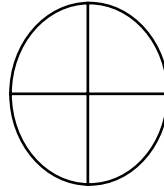
.....

ou

.....

$\sin(x) = b$

$b > 0$

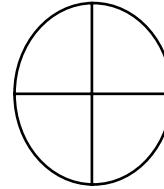


.....

ou

.....

$b < 0$



.....

ou

.....

Remarques :

-
-
-

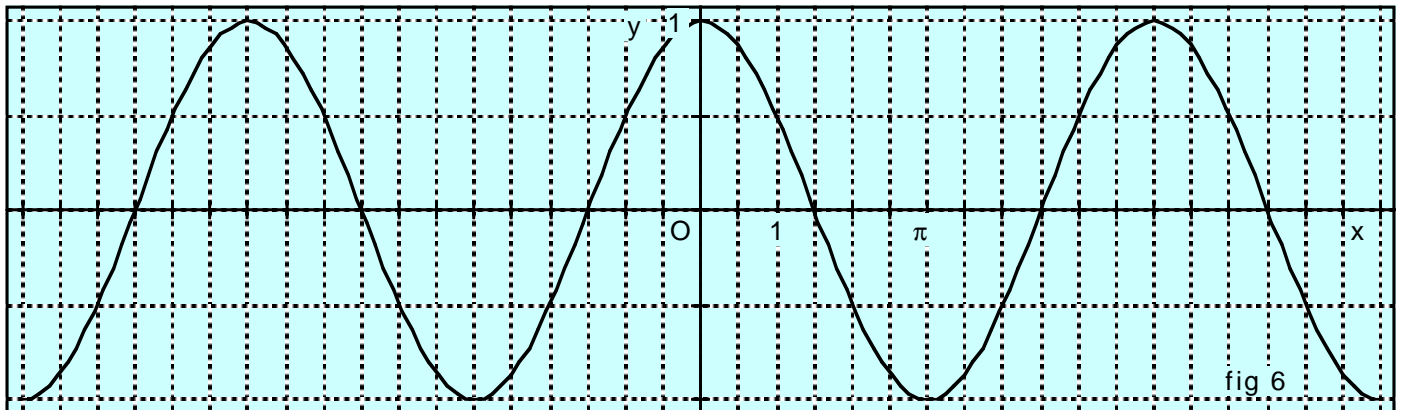
MÉTHODOLOGIE DE RÉOLUTION ALGÈBRIQUE D'UNE ÉQUATION TRIGONOMÉTRIQUE DU TYPE

$\cos(x) = a$ OU $\sin(x) = b$ SUR $]-\pi;\pi]$, x étant exprimée en fraction de π .

-
-
-
-
-
-
-

Exemples de résolutions graphiques par une autre méthode.

1. Soit la courbe C représentée dans le plan muni du repère de la figure 6.



a. Observer C et donner l'expression algébrique de la fonction f définie sur $[-3\pi; 3\pi]$ représentée par C .

.....

b. Résoudre alors graphiquement sur $]-\pi; \pi]$, en faisant apparaître les traits de construction, l'équation $f(x) = 0,5$:

.....

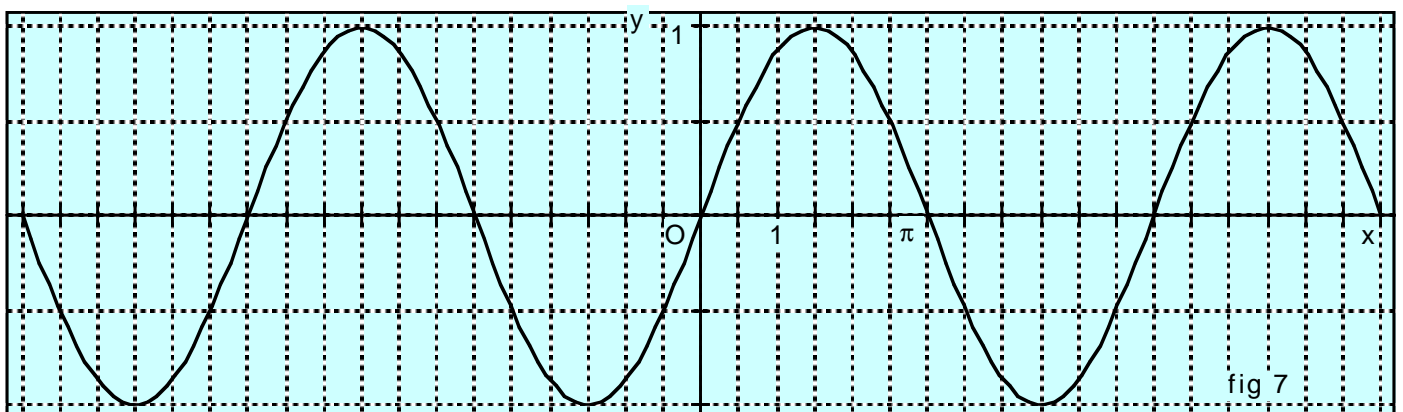
c. Vérifier par le calcul les résultats obtenus.

.....

.....

.....

2. Soit la courbe C représentée dans le plan muni du repère de la figure 7.



a. Observer C et donner l'expression algébrique de la fonction f définie sur $[-3\pi; 3\pi]$ représentée par C .

.....

b. Résoudre alors graphiquement sur $]-\pi; \pi]$, en faisant apparaître les traits de construction, l'équation $f(x) = 0,5$:

.....

c. Vérifier par le calcul les résultats obtenus.

.....

.....

.....

Entraînement

Résoudre algébriquement sur $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes, où x est une mesure d'angle exprimée en radians, et représenter les solutions obtenues sur un cercle trigonométrique.

E1 - $\cos(x) = \sqrt{3}/2$ $\cos(x) = -0,28$

E2 - $\cos(x) = -1$ $\cos(x) = 0,75$

E3 - $\sin(x) = 0,6$ $\sin(x) = -\sqrt{3}/2$

E4 - $\sin(x) = -1$ $\sin(x) = 0,85$

Déterminer en radians les mesures d'angles x telles que :

E6 - $\cos(x) = 0,5$ et $\sin(x) = -\sqrt{3}/2$

E7 - $\cos(x) = \sqrt{3}/2$ et $\sin(x) = 0,5$

E8 - $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = -1$

E9 - $\cos(x) = -\sqrt{2}/2$ et $\sin(x) = -\sqrt{2}/2$

E10 - Résoudre le système suivant et déterminer x , nombre réel en degré.

$$\begin{cases} -2 \cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) = 1+\sqrt{2} \\ 2\cos(x) + 4\sin(x) = \sqrt{2} \end{cases}$$

Transferts

T1 - Pour aller plus loin.

Résoudre algébriquement sur $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes, où t est un nombre réel en radian.

a. $\cos(3t) = 0$

b. $\cos(2t - \pi/4) = -\sqrt{2}/2$

c. $\sin(2t) = -0,5$

d. $\sin(3t + \pi/6) = 0,5$

T2 - Une inéquation trigonométrique.

a. Résoudre algébriquement sur $]-\pi;\pi]$ l'équation $\cos(x) = 0,5$, où x est un nombre réel en radian.

b. Tracer un cercle trigonométrique pour placer les solutions obtenues.

c. Surligner l'arc de cercle tel que $\cos(x) > 0,5$.

d. Donner un encadrement des solutions sur $]-\pi;\pi]$ de l'inéquation $\cos(x) > 0,5$.

T3 - Électricité.

On considère la tension sinusoïdale u , fonction du temps t , telle que $u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$, où $U = 220V$, $\omega = 2\pi f$ avec $f = 50$ Hz et $\varphi = \pi/6$ rad.

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de t , $u(t) = 110$ V puis $u(t) = -220V$, t étant compris entre 0 et 0,02s.