Activités différenciées en 1ère année de STS : Optimisation et calcul formel

Frédéric BOURE

Lycée Les Pannevelles – 77 PROVINS

L'hétérogénéité des classes de 1ère année de STS est fréquente et gérer cette hétérogénéité n'est pas toujours simple, surtout en début d'année scolaire. Les activités proposées ici peuvent être mise en œuvre dès le début de l'année.

Les objectifs élèves sont multiples :

- ✓ modéliser un problème concret
- ✓ exploiter les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique comme support à la conjecture
- ✓ remobiliser les connaissances antérieures sur la dérivation pour traiter un problème d'optimisation
- ✓ prendre contact avec l'utilisation d'un logiciel de calcul formel

Les problèmes traités ici n'ont pas la prétention d'être originaux (ils sont même très classiques). L'objectif est en revanche de décrire un moyen de différenciation en 1ère année de STS. Ici, j'ai opté pour une différenciation sur deux niveaux :

1er niveau : les pré-requis des étudiants sur la dérivation et les fonctions usuelles

FPRO : Etudiants issus d'une filière professionnelle	**FGT** : Etudiants issus d'une filière STI2D ou S
Manipulation de fonctions polynômiales, Dérivation de telles fonctions (pas de dérivée de composée) Lien entre signe de la dérivée sur un intervalle et sens de variation de la fonction sur cet intervalle	Etude de fonctions trigonométriques Dérivation et opérations, dérivation de fonctions trigonométriques Lien entre signe de la dérivée sur un intervalle et sens de variation de la fonction sur cet intervalle

2ème niveau : l'autonomie quant à l'utilisation d'outils logiciels

UN : Utilisateur novice	**UI :** Utilisateur intermédiaire	**UA :** Utilisateur autonome
Enoncé détaillé, aide technique fournie, appel à l'enseignant régulier au fur et à mesure de l'avancement dans le TP	Enoncé moins détaillé, possibilité d'appel à l'enseignant en cas de blocage.	Enoncé ouvert quant à la construction d'une figure, utilisation raisonnée et autonome du logiciel (auto-correction)

Les **deux énoncés** proposés ici en exemple sont respectivement classés dans les catégories **FPRO et UI (géom. dynamique)** pour le premier énoncé et **FGT et UA (géom. dynamique)** pour le second. L'utilisation de logiciels de calcul formel étant inédite pour mes étudiants, j'ai préféré me placer à un niveau **UN** concernant son utilisation en détaillant les fonctionnalités et en guidant les étudiants dans chacun des énoncés.

Bien entendu, on aurait aussi pu proposer un énoncé **FPRO et UA** ou **FGT et UN**, tout dépend du profil des étudiants (un sondage rapide en début d'année permet de se faire une première idée sur la maitrise de tel ou tel logiciel).

Mise en œuvre

Le TP s'est déroulé sur deux séances d'une heure, chaque étudiant (en binôme) ayant à traiter le sujet suivant le profil du binôme. Un compte-rendu a été ramassé et évalué à l'issue de la deuxième séance.

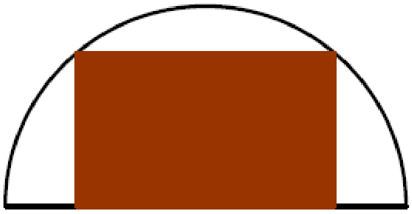
Les deux TP ont été plutôt bien accueillis, les contenus, adaptés à chacun des profils, n'ont pas causé d'obstacle majeur. Quelques indications ont été cependant nécessaires pour traiter la partie « démonstration » du problème d'optimisation version 2 (signe d'une expression trigonométrique, utilisation du cercle trigonométrique en vue de résoudre une inéquation trigonométrique).

Ce type d'activités différenciées peut être généralisé à d'autres thématiques au progamme. Dans cette optique, on pourra consulter avec profit les grilles de comparaison des programmes de lycée pro, LGT et de STS.

Énoncé 1

Optimisation et calcul formel

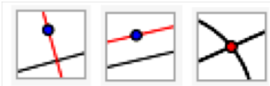
Problème.



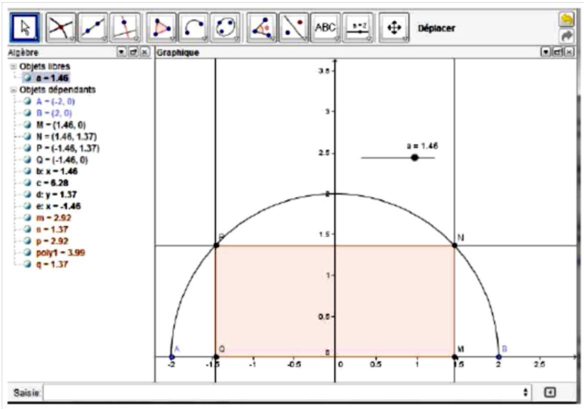
On souhaite inscrire une fenêtre rectangulaire dans un demi-disque de rayon 2 mètres, de sorte que l'aire de la fenêtre soit maximale (pour assurer le maximum de luminosité dans la pièce).

Expérimentation sur Geogebra et conjectures

1 Construction d'une figure sous Geogebra

Consignes	Aide logicielle
1) Faire apparaître les aces de coordonnées (s'ils ne sont pas déjà apparents)	Menu Affichage (on peut afficher les axes, une grille…)
2) Placer les points A et B de coordonnées A(-2;0) et B(2;0).	Pour construire un point connaissant ses coordonnées, saisir dans la barre de saisie en base de la fenêtre : A=(-2,0) **Attention** : les coordonnés cartésiennes d'un point sous Geogebra se notent avec une virgule et non un point-virgule
3) Construire alors le demi-cercle de diamètre [AB]	On pourra exploiter le menu déroulant « Cercle »
4) Construire un curseur nommé a pouvant varier entre 0 et 2 avec un pas de 0,01. Construire alors le point M de coordonnées (a;0).	Utiliser le bouton . La boîte de dialogue permet de paramétrer ce curseur. On peut toujours modifier les paramètres de ce curseur par un clic droit.
5) Construire alors le rectangle MNPQ, M et Q étant les deux points du rectangle appartenant à l'axe des abscisses et N, P appartenant au demi-cercle. Quel est l'intérêt du curseur dans la situation étudiée ?	Pour construire ce rectangle, on construira des perpendiculaires et parallèles en utilisant les outils du menu « Droites » et les intersections de deux objets en utilisant l'outil « Point d'intersection » : 

2 Exploitation de cette figure et conjecture

Consignes	Aide logicielle
En utilisant le commande « Polygone », construire alors le rectangle MNPQ. Dans la fenêtre Algèbre, l'aire de ce polygone apparaît sous le nom **poly1** Faire varier la valeur de a grâce au curseur, émettre une conjecture quant au problème posé. ⇨ *La conjecture devra apparaître sur le compte-rendu* **Appeler le professeur pour vérification de votre figure et de votre conjecture**	La figure Geogebra à exploiter devra ressembler à cette capture d'écran : 

1 Algébrisation du problème

⇨ A chercher et à rédiger pour le compte-rendu.

On désigne par x la longueur OM comprise entre 0 et 2, O désignant l'origine du repère.

1) En utilisant le théorème de Pythagore, exprimer la longueur MN en fonction de x.
2) Montrer alors que l'aire du rectangle MNPQ est donnée en fonction de x par la fonction définie sur [0;2] par

$$f(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

2 Utilisation du logiciel de calcul formel MAXIMA pour étudier la fonction f

⇨ L'ensemble des réponses de cette partie devront apparaître dans le compte-rendu.

On souhaite désormais étudier les variations de la fonction f en vue de prouver l'existence d'un maximum et de déterminer la valeur de ce maximum et la valeur de x en laquelle il est atteint.

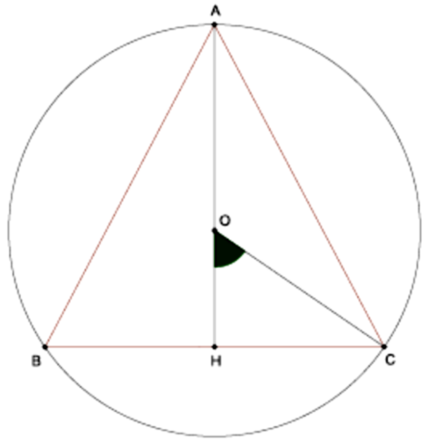
Consignes	Aide logicielle

1) Définir dans MAXIMA la fonction f	Pour cela, on peut utiliser la fonction
	`define(f(x),expression)`
	où `expression` est l'expression de la fonction f en fonction de x
	On peut aussi utiliser le symbole := avec la syntaxe
	`f(x):=expression`
	La racine carrée d'un nombre se définit avec la commande `sqrt()`. Par exemple `sqrt(3)` désigne $\sqrt{3}$.
	On valide la commande en appuyant simultanément sur Shift et Entrée

2) On pourra tracer la courbe représentative de la fonction f sous Geogebra ou sous Maxima.	Sous Geogebra, pour construire une courbe connaissant son équation, saisir dans la barre de saisie une équation de cette courbe. Par exemple, pour tracer la parabole d'équation $y = x^2$, on saisit : `y=x^2` Sous Maxima, Menu « Tracé de courbes » puis « Courbe 2d ». Remplir la boite de dialogue.
3) Calculer la dérivée f' de la fonction f à l'aide du logiciel Maxima	On pourra explorer le menu « Calcul »
4) Afin d'étudier le signe de cette dérivée, on souhaite écrire $f'(x)$ sous la forme d'un unique quotient.	Exploiter la commande `factor` du menu `Simplifier`
5) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ à la main puis à l'aide du logiciel.	Exploiter la commande `Résoudre une équation` du menu `Equations`
6) Etudier alors le signe de la dérivée et démontrer la conjecture émise précédemment.	**Appeler le professeur pour vérification de vos manipulations sur le logiciel**

Énoncé 2

Optimisation et calcul formel



Problème

On souhaite inscrire une fenêtre triangulaire isocèle ABC sur un cercle de rayon 1 mètre, de sorte que l'aire de la fenêtre soit maximale (pour assurer le maximum de luminosité dans la pièce).

Expérimentation sur GeoGebra et conjectures

$\boxed{1}$ Construction d'une figure sous GeoGebra

Un triangle ABC isocèle en A est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. On appelle H le pied de la hauteur issue de A. L'objectif est de déterminer les triangles ABC vérifiant les contraintes précédentes et d'aire maximale.

Sur le logiciel GeoGebra, construire une figure correspondant au problème posé, B étant un point libre sur le cercle de centre O et de rayon 1. Afficher alors une mesure en radians de l'angle $\widehat{HOC}$ et l'aire du triangle ABC.

> ⇨ **Attention**
> Il faudra absolument veiller à ce que les contraintes de l'énoncé soit simultanément satisfaites : les points B et C appartiennent au cercle et le triangle ABC est isocèle en A.
>
> Vérifier que votre construction est valide en déplaçant le point B (le point C doit alors se déplacer de sorte que ABC reste isocèle en A).

Exploiter la figure et émettre une conjecture. On précisera dans cette conjecture une mesure de l'angle $\widehat{HOC}$ pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale, une valeur approchée de cette aire maximale et la nature du triangle ABC lorsque cette son aire est maximale. ⇨ *La conjecture devra apparaître sur le compte-rendu*

Appeler le professeur pour vérification de votre figure et de votre conjecture

Démonstration de la conjecture

$\boxed{1}$ Algébrisation du problème

> ⇨ A chercher et à rédiger pour le compte-rendu.
>
> On désigne par α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{HOC}$ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
> 1) En utilisant les relations trigonométriques dans le triangle OHC, montrer que
> $$BC = 2BH = 2\sin\ \alpha$$
> 2) Après avoir justifié que $AH = 1 + OH$, montrer que $AH = 1 + \cos\alpha$.
> 3) En déduire que l'aire $A(\alpha)$ du triangle ABC est donnée par
> $$A(\alpha) = \sin\alpha(1 + \cos\alpha).$$

$\boxed{2}$ Utilisation du logiciel de calcul formel MAXIMA pour étudier la fonction A

⇨ L'ensemble des réponses de cette partie devront apparaître dans le compte-rendu.

On souhaite désormais étudier les variations de la fonction A sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ en vue de prouver l'existence d'un maximum et de déterminer la valeur de ce maximum et la valeur de α en laquelle il est atteint.

On pourra renommer la variable α en x dans la suite.

Consignes	Aide logicielle

1) Définir dans MAXIMA la fonction A	Pour cela, on peut utiliser la fonction
	`define(A(x),expression)`
	où `expression` est l'expression de la fonction A en fonction de x
	On peut aussi utiliser le symbole := avec la syntaxe
	`A(x):=expression`
	La racine carrée d'un nombre se définit avec la commande `sqrt()`. Par exemple `sqrt(3)` désigne $\sqrt{3}$.
	On valide la commande en appuyant simultanément sur Shift et Entrée

2) On pourra tracer la courbe représentative de la fonction A sous Geogebra ou sous Maxima.	Sous GeoGebra, pour construire une courbe connaissant son équation, saisir dans la barre de saisie une équation de cette courbe. Par exemple, pour tracer la parabole d'équation $y = x^2$, on saisit : `y=x^2` Sous Maxima, Menu « Tracé de courbes » puis « Courbe 2d ». Remplir la boite de dialogue.
3) Calculer la dérivée A' de la fonction A à l'aide du logiciel Maxima. Vérifier alors, en exploitant que $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$ que $A'(\alpha) = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1$	On pourra explorer le menu « Calcul »
4) Afin d'étudier le signe de cette dérivée, on souhaite écrire $A'(\alpha)$ sous la forme d'un produit.	Exploiter la commande `factor` du menu `Simplifier`
5) Résoudre l'équation $A'(\alpha) = 0$ à l'aide du logiciel. Quelle mise en garde est indiquée par le logiciel à l'utilisateur ?	Exploiter la commande `Résoudre une équation` du menu `Equations` `(%i19) solve((cos(alpha)+1)*(2*cos(alpha)-1)=0,alpha);` *solve: using arc-trig functions to get a solution.* *Some solutions will be lost.* (%o19) $[\alpha=\frac{\pi}{3}, \alpha=\pi]$ **Appeler le professeur pour vérification de vos manipulations sur le logiciel**

6) Pour tout réel α, on vient de voir qu $A'(\alpha) = 2\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)(\cos\alpha + 1)$ et que cette expression s'annule en $\frac{\pi}{3}$ sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$.

a) En exploitant un cercle trigonométrique, étudier le signe de chacun des facteurs $\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)$ et $(\cos\alpha + 1)$ lorsque α décrit l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$. En déduire le tableau de signe du produit $A'(\alpha)$.

b) En déduire les variations de la fonction A. Conclure.