Séquence : initiation au calcul de primitives et au calcul intégral

Frédéric BOURE
Lycée Les Pannevelles – 77 PROVINS

François MAILLOUX
Lycée Condorcet – 93 MONTREUIL

Cette séquence peut être proposée dans le cadre du programme complémentaire en Terminale BAC PRO pour les élèves envisageant une poursuite d'étude en BTS ou bien en première année de BTS pour réactiver les acquis de Terminale sur les notions de primitive et le calcul intégral.

Cette séquence est construite en trois temps :

- **Activité 1 : « Etude d'un ascenseur »**
  Compétences mobilisées : Modéliser, Chercher
  L'objectif de cette première activité est d'introduire, dans un contexte de cinématique, la notion de primitive (le principe fondamental de la dynamique – PFD – exprimant l'accélération de la cabine, il s'agit de déterminer l'expression de la fonction h donnant la hauteur de la cabine lors des trois phases d'ascension en fonction du temps).
  Dans cette activité, nous avons fait le choix de donner clés en main toutes les expressions issues du PFD afin que la modélisation en mécanique ne soit pas bloquante pour les élèves (bilan des forces etc.)
  En STS 1$^{\text{ère}}$ année, cette partie modélisation pourra être menée en autonomie par les étudiants (le PFD étant au programme de Sc. Physiques en 1$^{\text{ère}}$ année de STS)
- **Activité 2 : « Initiation au calcul de primitives »**
  Compétences mobilisées : Raisonner, Calculer, Mettre en œuvre une stratégie
  Dans cette seconde activité, on institutionnalise le concept de primitive rencontré lors de la première activité. On développe désormais quelques techniques simples de calcul de primitives pour des fonctions polynômiales (on ne vise ici aucune technicité experte, l'objectif étant ici une prise de contact avec le calcul de primitives dans des cas très simples). Dans l'acte 2, on propose de déterminer par essais-erreurs des primitives de fonctions élémentaires (les exemples choisis sont progressifs et visent à déclencher chez l'élève une technique de calcul systématique). Le logiciel (ou la calculatrice) de calcul formel permet ici une auto-correction de l'élève et de provoquer une interrogation sur les erreurs effectuées. Pour les élèves plus en difficulté et désirant une méthode systématique et sécurisante, on pourra envisager de traiter l'acte 3.
  Différenciation possible pour les élèves issus de filières S ou STI2D
  En première année de STS, une différenciation est possible suivant le cursus antérieur des étudiants. On pourra par exemple remobiliser les techniques de calcul de primitives rencontrées en Tale (document ***TD Techniques de calcul de primitives***). Pour les élèves issus de filières professionnelles, ce TD pourra être l'objet d'un approfondissement en n'oubliant pas que l'outil calcul formel doit être privilégié dans les cas les plus complexes.
- **Activité 3 : « Vers le calcul intégral : un problème de nivellement »**
  Compétences mobilisées : S'informer, Chercher, Modéliser
  On traite ici un problème classique sur le nivellement d'un terrain, l'objectif étant ici de s'interroger sur la notion d'aire et les techniques de calcul d'aire d'un domaine compris sous une courbe. On propose ici quelques techniques d'approximation de l'aire du domaine hachuré (par quadrillage, en utilisant une méthode des rectangles à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique) puis, dans la

dernière partie une méthode experte avec comme points d'appui des extraits d'éléments de cours que les élèves devront s'approprier pour les mettre en œuvre dans la situation proposée.

Activité 1

Étude d'un ascenseur : notion de primitive

Une personne monte au rez-de-chaussée d'un immeuble dans un ascenseur et se place sur un pèse-personne. Elle relève la mesure affichée sur le pèse-personne au cours de son trajet jusqu'au 5ème étage.

L'objectif de cette activité est d'établir la hauteur et la vitesse de la cabine à différents instants.

Partie A – Valeurs initiales du problème

D'après les lois de la physique, on peut établir que la valeur M (en kg) affichée par le pèse-personne, est liée à l'accélération a (en m/s) de la cabine et à la masse m (en kg) de la personne par la relation $M = m – ma/g$, où g est la pesanteur à la surface de la terre, soit 9,8 m/s². Ainsi, on peut déduire l'accélération a de la cabine par la formule $a=Mg/m-g$.

1) a) Compléter le tableau ci-dessous en sachant que la masse m de la personne est de 73 kg.

b) Quelles sont les trois phases de la montée de la cabine d'ascenseur entre le rez-de-chaussée et le 5ème étage ?

Temps *t* (en s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Mesure affichée *M* (en kg)	95,3	95,3	95,3	95,3	73	73	73	73	73	73
Accélération *a* (en m/s²)										

Temps *t* (en s)	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5
Mesure affichée *M* (en kg)	73	73	73	73	73	73	50,6	50,6	50,6	50,6
Accélération *a* (en m/s²)										

2) La fonction $h: t \to h(t)$ désigne la hauteur de la cabine en fonction du temps. On considère qu'au rez-de-chaussée de l'immeuble, la cabine se situe à 0 m. On prend pour origine des temps l'instant où la cabine démarre. Quelle est la valeur de $h(0)$?

3) La fonction $v: t \to v(t)$ désigne la vitesse instantanée de la cabine en fonction du temps. Quelle est la valeur de $v(0)$?

Partie B – Étude de la hauteur sur l'intervalle [0 ; 1,5]

On établit en mécanique que la vitesse instantanée de la cabine v est la fonction dérivée de la fonction h et que l'accélération instantanée de la cabine a est la fonction dérivée de la vitesse v. Ainsi, $v(t) = h'(t)$ et $a(t) = v'(t)$.

1) La fonction h est définie sur [0;1,5] par $h(t) = \frac{3t^2}{2}$.

a) Calculer $h(1{,}5)$. En déduire la hauteur de la cabine au bout de 1,5 s.

b) La fonction h est dérivable sur [0;1,5]. Calculer $h'(t)$ sur l'intervalle [0;1,5].

2) La fonction v est définie sur [0;1,5] par $v(t) = 3t$.

a) Calculer $v(1{,}5)$. En déduire la vitesse de la cabine au bout de 1,5 s.

b) Calculer $v'(t)$ sur l'intervalle [0;1,5].

Partie C – Étude de la hauteur sur l'intervalle [1,5 ; 8]

On a $v(t) = h'(t)$ et $a(t) = v'(t)$.

1) a) On cherche maintenant à établir la vitesse en fonction du temps. Si a est la fonction constante, définie sur [1,5 ; 8] par $a(t) = 0$, quelles sont les expressions possibles de $v(t)$? (On rappelle que $a(t) = v'(t)$.)

b) En vous aidant du résultat que la question 5) a), donner l'expression de $v(t)$ en fonction de t sur l'intervalle [1,5 ; 8].

c) Calculer $v(8)$. En déduire la vitesse atteinte par la cabine au bout de 8 s.

2) a) Si v est la fonction définie sur [1,5 ; 8] par $v(t) = 4{,}5$, quelles sont les expressions possibles pour $h(t)$? (On rappelle que $v(t) = h'(t)$.)

b) En vous aidant du résultat de la question 4) a), donner l'expression de $h(t)$ en fonction de t sur l'intervalle [1,5 ; 8].

c) Calculer $h(8)$. Quelle est la hauteur atteinte par la cabine au bout de 8 s ?

Partie D – Étude de la hauteur sur l'intervalle [8 ; 9,5]

On a $v(t) = h'(t)$ et $a(t) = v'(t)$.

1) a) On cherche maintenant à établir la vitesse en fonction du temps. Si a est la fonction constante, définie sur [8;9,5] par $a(t) = -3$, quelles sont les expressions possibles de $v(t)$? (On rappelle que $a(t) = v'(t)$.)

b) En vous aidant du résultat que la question 6) c), donner l'expression de $v(t)$ en fonction de t sur l'intervalle [8;9,5].

c) Calculer $v(9{,}5)$. Ce résultat vous paraît-il vraisemblable et pourquoi ?

2) a) Si v est la fonction définie sur [8;9,5] par $v(t) = -3t + 28{,}5$ quelles sont les expressions possibles pour $h(t)$? (On rappelle que $v(t) = h'(t)$.)

b) En vous aidant du résultat de la question 8) c), donner l'expression de $h(t)$ en fonction de t sur l'intervalle [8;9,5].

c) Calculer $h(9{,}5)$. En déduire la hauteur du 5ème étage.

Activité 2

Initiation au calcul de primitives…

Acte 1 - A la découverte de la notion de primitive...

Un premier exemple. — On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^2 + 2x \text{ et } F(x) = x^3 + x^2.$$

On remarque que F admet pour dérivée la fonction f, en effet :

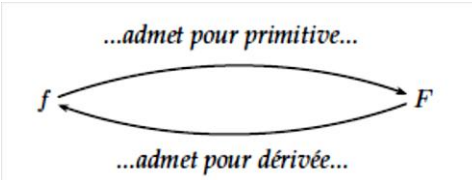
$$F'(x) = 3x^2 + 2x = f(x).$$

On dit que F est une primitive de la fonction f.

Définition. — Soit I un intervalle. On considère f une fonction définie sur I. Une fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, on ait

$$F'(x) = f(x).$$

F est appelée **primitive de la fonction** f.



Une infinité de primitives ? — Prenons désormais la fonction f définie par $f(x) = 8x^3 - 2x + 3$.

1) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = 2x^4 - x^2 + 3x + 2$ est une primitive de la fonction f.
2) Montrer que la fonction G définie par $G(x) = 2x^4 - x^2 + 3x + 5$ est également une primitive de f.
3) Citer une autre primitive H de la fonction f.
4) Il semblerait que l'on puisse ainsi trouver une infinité de primitives pour une même fonction f. Expliquer pourquoi et donner la forme de ces primitives.

Proposition. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I alors, toute autre primitive G de f s'écrit sous la forme

$$\text{pour tout } x \in I \qquad G(x) = F(x) + C$$

où C est une constante quelconque.

Acte 2 – Vers le calcul de primitives...

Deviner des primitives. — Déterminer une primitive d'une fonction f revient en fait à se poser la question :

« Quelle fonction puis-je dériver pour "retomber" sur la fonction initiale f ? »

1) Compléter alors le tableau suivant en proposant dans chaque cas une primitive adéquate :

La fonction f suivant admet…	… pour primitive la fonction F définie par …
$f(x) = 5$	$F(x) =$
$f(x) = 2x$	$F(x) =$
$f(x) = 2x + 5$	$F(x) =$

$f(x) = x - 3$	$F(x) =$
$f(x) = 3x^2$	$F(x) =$
$f(x) = x^2$	$F(x) =$
$f(x) = 6x^2$	$F(x) =$
$f(x) = 6x^2 + 6x - 2$	$F(x) =$
$f(x) = x^3$	$F(x) =$
$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$	$F(x) =$

2) Vérifier chacun de vos résultats en dérivant la fonction F proposée.
3) Valider vos résultats à l'aide du logiciel de calcul formel Maxima ou d'une calculatrice de calcul formel. (*cf* notice technique jointe)

Acte 3 – Vers une méthode systématique de recherche de primitives

Dans l'acte 2, nous avons vu que la recherche de primitives d'une somme algébrique se ramène à chercher des primitives de chaque terme de cette somme. Nous allons désormais décrire une méthode permettant de déterminer simplement une primitive de fonctions sommes algébriques de fonctions « élémentaires ».

Mise en place sur un exemple. — On souhaite déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par

$$f(x) = 3x^2 + 2x^4 - x + 3 = 3 \times x^2 + 2 \times x^4 - x + 3.$$

Dans un premier temps, on identifie les fonctions élémentaires qui constituent notre somme algébrique : ici x^2, x^4, x et 3.

Fonctions élémentaires f	x^2	x^4	x	3
Forme des primitives associées F	x^3	x^5	x^2	$3x$

→ *on corrige les fonctions élémentaires en dérivant chaque terme de la ligne du bas* →

Fonctions élémentaires f	$3x^2$	$5x^4$	$2x$	3
Primitives associées F	x^3	x^5	x^2	$3x$

→ *on effectue une 2^nde^ correction en multipliant haut et bas par la constante appropriée de sorte à retrouver la fonction f initiale* →

Fonctions élémentaires f	$3x^2$	$\frac{2}{5} \times 5x^4$	$\frac{1}{2} \times 2x$	3
Primitives associées F	x^3	$\frac{2}{5} \times x^5$	$\frac{1}{2} \times x^2$	$3x$

d'où

Fonction f	$3x^2 + 2x^4 - x + 3$
Primitive associée F	$x^3 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$

Ainsi, une primitive de la fonction f est F définie par $F(x) = x^3 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 3x$.

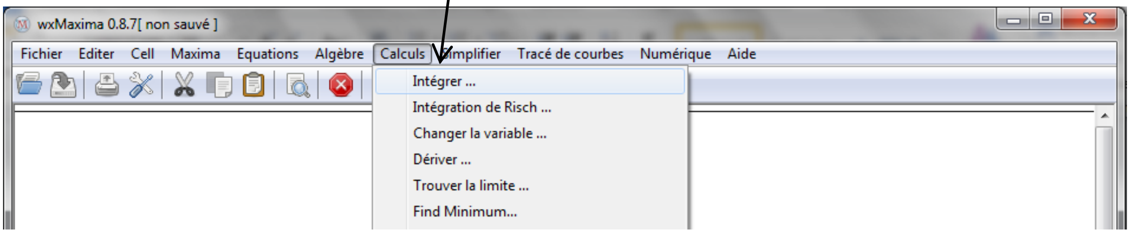
De la même façon, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

$$g(x) = 3x^2 + 7x - 1 \text{ et } h(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 2$$

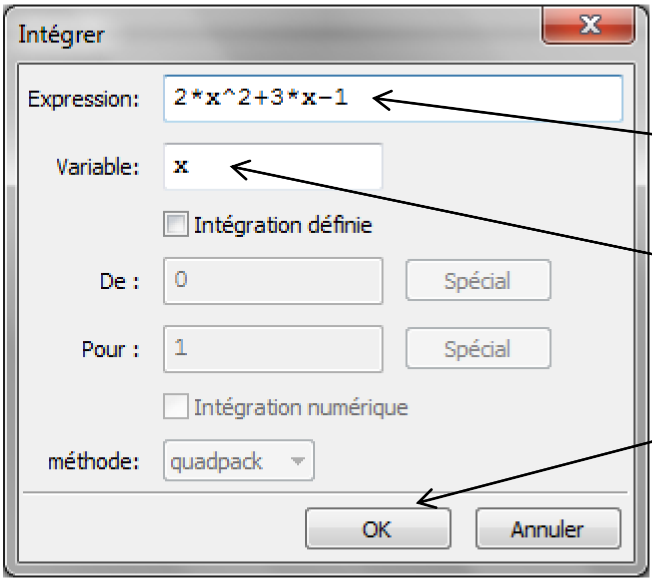
Tutoriel MAXIMA – Calculer une primitive ou une intégrale

Exemple 1 – Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

Dans le menu **Calculs**, cliquer sur la fonction **Intégrer…**



Renseigner alors la boîte de dialogue qui apparaît :

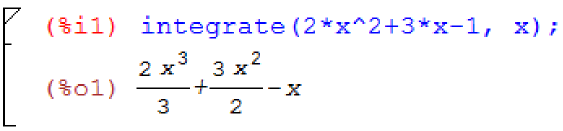


Dans le champ 'Expression', saisir l'expression de la fonction dont on souhaite obtenir une primitive, dans l'exemple actuel, il s'agit de la fonction :

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

Dans le champ 'Variable', saisir la variable. Dans cet exemple, elle s'appelle x.

On valide ensuite sur **OK**. Une primitive cherchée s'affiche alors dans la console Maxima.

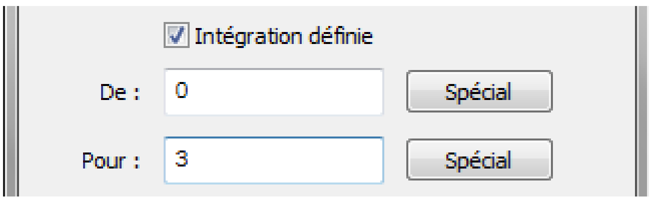


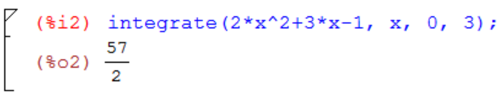
Une primitive de f est donc la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x.$$

Exemple 2 – Calculer l'intégrale $\int_0^3 2x^2 + 3x - 1 \ \mathrm{d}x$

Dans le menu **Calculs**, cliquer sur la fonction **Intégrer…** et dans la fenêtre de dialogue, cocher l'option **Intégration définie** puis remplir les champs **De :** avec la borne inférieure de l'intégrale et **Pour** : avec sa borne supérieure.



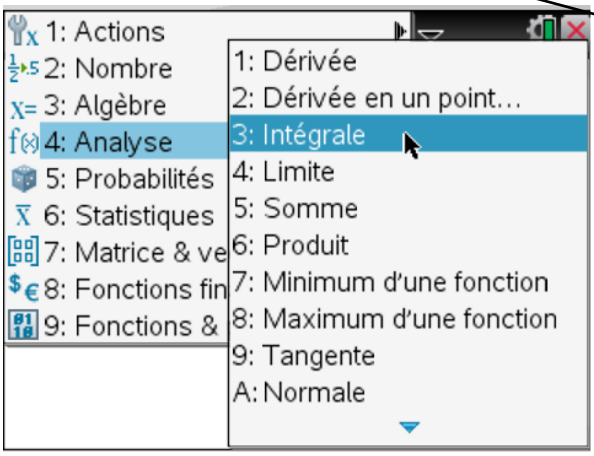


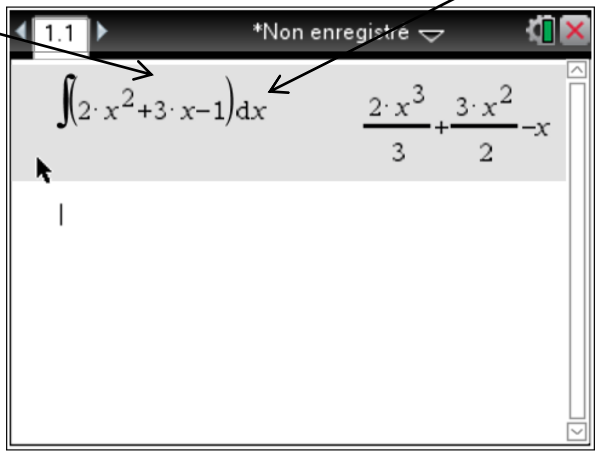
Ainsi, nous obtenons

$$\int_0^3 2x^2 + 3x - 1 \ \mathrm{d}x = \frac{57}{2}$$

Exemple 1 – Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

Dans une fenêtre calcul, appuyer sur la touche **MENU**, sélectionner **4 :Analyse** puis **3 :Intégrale**. Compléter le champ en ligne avec l'expression $f(x)$ de la fonction dont on cherche une primitive et compléter la variable derrière **d** par le nom de la variable d'intégration (ici x). On laissera les bornes vides. Valider avec **ENTER**



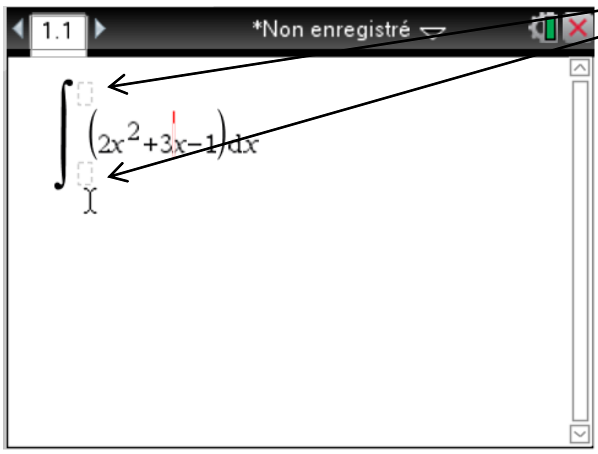


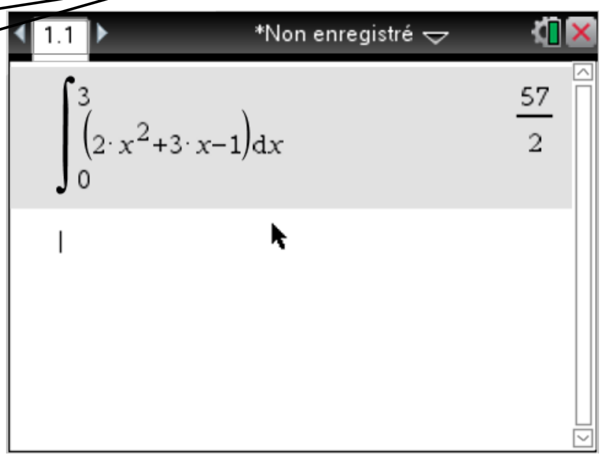
Une primitive de f est donnée par la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x.$$

Exemple 2 – Calculer l'intégrale $\int_0^3 2x^2 + 3x - 1 \ \mathrm{d}x$

Dans une fenêtre calcul, appuyer sur la touche **MENU**, sélectionner **4 :Analyse** puis **3 :Intégrale** (cf. capture d'écran de gauche précédente). Compléter le champ en ligne avec l'expression $f(x)$ de la fonction et compléter la variable derrière **d** par le nom de la variable d'intégration (ici x) puis les bornes d'intégrations. Valider avec **ENTER**.





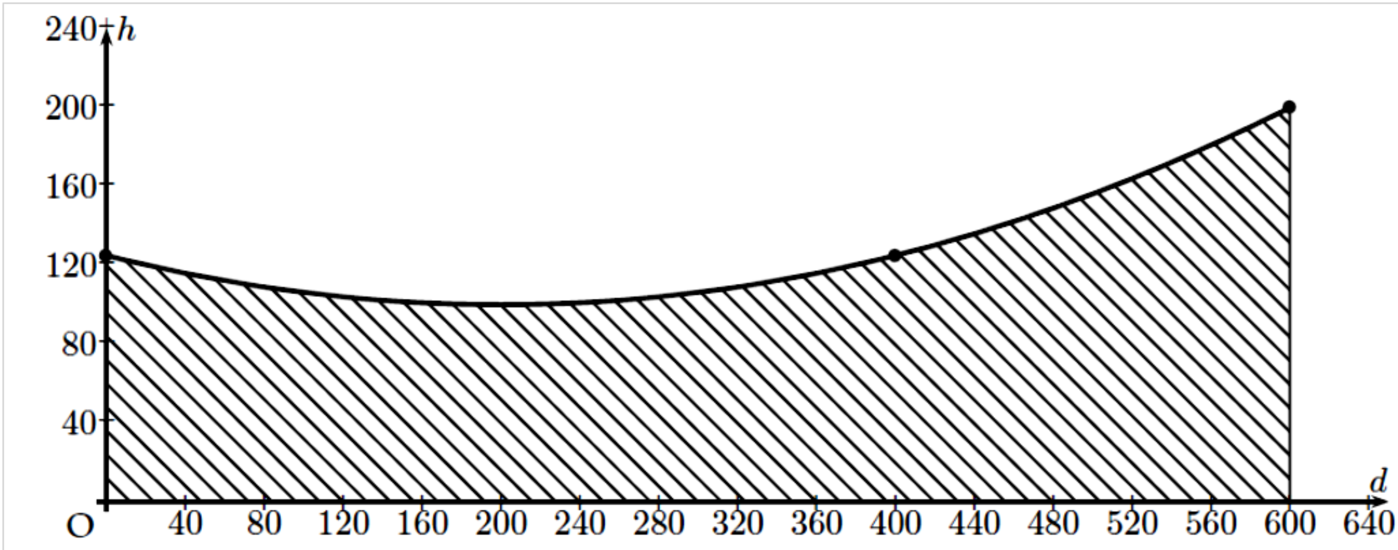
Ainsi, nous obtenons

$$\int_0^3 2x^2 + 3x - 1 \ \mathrm{d}x = \frac{57}{2}$$

Activité 3

Vers le calcul intégral : niveler un terrain…

On souhaiterait niveler (à plat) un terrain dont la coupe est la suivante (d et h étant exprimés en mètres). Les mesures effectuées par un géomètre nous permettent d'affirmer que cette courbe passe par les points de coordonnées $(0;\ 125)$, $(400;\ 125)$ et $(600;\ 200)$.



Acte 1 – Modélisation

On souhaite modéliser la coupe précédente par la parabole représentative d'une fonction trinôme du second degré définie sur l'intervalle [0; 600] par

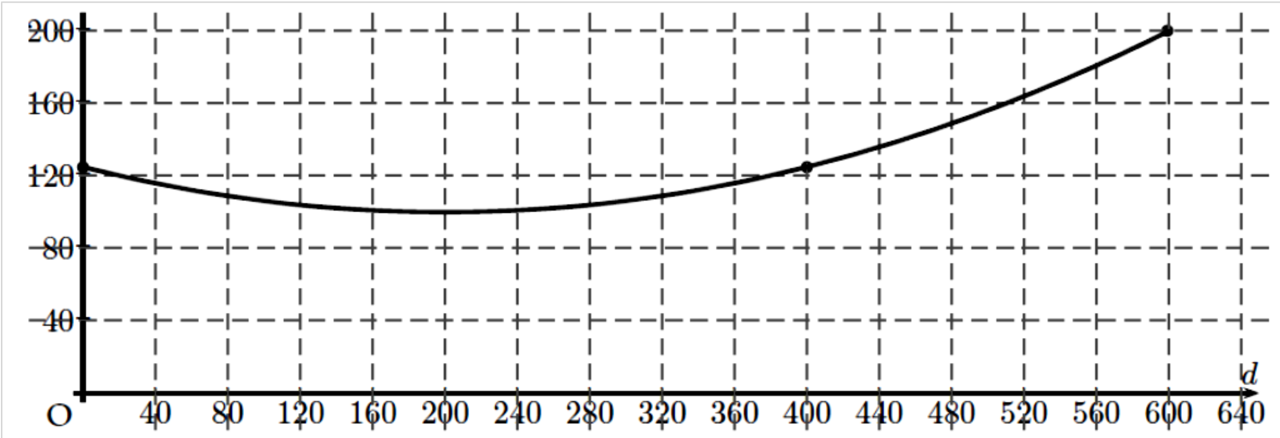
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a, b et c étant trois constantes réelles à déterminer, a étant non nulle.

1) En prenant en compte les mesures effectuées par le géomètre, justifier que a, b et c vérifient le système suivant :
$$\begin{cases} c = 125 \\ 160\,000a + 400b + 125 = 125 \\ 360\,000a + 600b + 125 = 200 \end{cases}$$

2) Résoudre à la main ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel ou d'une calculatrice scientifique ce système et conclure quant à l'expression de f.
3) Expliquer en quoi le problème à résoudre se ramène à déterminer l'aire A de la zone hachurée sur la figure ci-dessus.

1) Justifier que pour tout $x \in [0; 600]$, on a
$$100 \leq f(x) \leq 200$$
(on pourra, pour cela, étudier les variations de la fonction f).
En déduire que l'aire A (en m²) du domaine hachuré est comprise entre 60 000 m² et 120 000 m².
2) On souhaite affine l'encadrement précédent. Pour cela, on envisage désormais de quadriller le plan par des carrés de côté 40 mètres :



Proposer alors un nouvel encadrement de l'aire A. En s'inspirant de cette méthode, proposer un moyen d'obtenir un encadrement encore plus précis de l'aire A.

3) On propose désormais une autre méthode permettant d'encadrer l'aire A. Ouvrir le fichier Geogebra ***SommesDarboux.ggb***. Faire varier les valeurs du curseur n. La méthode illustrée dans ce fichier s'appelle « Méthode des rectangles de Darboux ».
   a) Qu'observe-t-on lorsque n augmente ? Expliquer pourquoi cette méthode permet d'obtenir un encadrement aussi fin qu'on le souhaite de l'aire A.
   b) Déterminer un encadrement de A d'amplitude 1000.

Voici ci-dessous quelques extraits de l'article « Intégrale » du site ***Wikipédia*** :

> L'**intégration** est un concept fondamental en mathématiques, issu du calcul des aires et de l'analyse, et utilisé dans de nombreuses branches des mathématiques. L'intégration permet, entre autres, de calculer la surface de l'espace délimité par la représentation graphique d'une fonction […]
>
> Le symbole mathématique représentant l'intégration, $\int$, est appelé *signe somme*, *signe d'intégration, signe intégral* ou *intégrateur* ; il a été introduit par Leibniz.

Dans un manuel de terminale, on nous propose une définition, un exemple de calcul d'intégrale ainsi qu'une proposition faisant le lien entre le calcul d'intégrales et le calcul d'aire :

Définition. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle fermé I. Soient a et b deux nombres appartenant à I. Soit F une primitive de f.

On appelle **intégrale de la fonction f de a à b** le nombre noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ égal à $F(b)-F(a)$. On note alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a).$$

Exemple. Calculons l'intégrale suivante :

$$\int_2^4 (4x^3-1)\,\mathrm{d}x$$

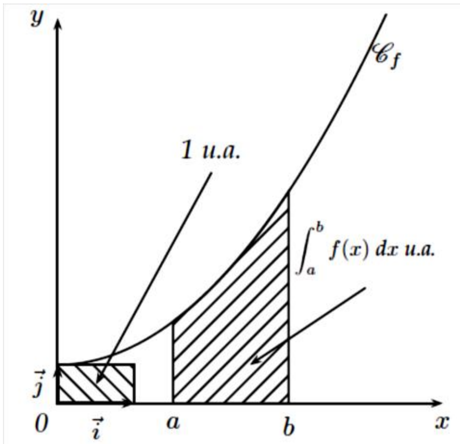
Ici, on a $f(x)=4x^3-1$ donc la fonction F définie par $F(x)=x^4-x$ est une primitive de f. Donc,

$$\int_2^4 (4x^3-1)\,\mathrm{d}x = [x^4-x]_2^4 = F(4)-F(2)$$
$$= (4^4-4)-(2^4-2) = 252-14 = 238.$$

Proposition. Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a;b]$. Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;I;J)$. Soit K le point tel que $OIJK$ soit un rectangle. L'aire de ce rectangle est **l'unité d'aire**.

L'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale, en unités d'aire, à l'intégrale

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$



1) Déterminer une primitive de la fonction f. On pourra vérifier la réponse à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
2) Quelle intégrale devra-t-on calculer pour déterminer l'aire A de la partie hachurée ?
3) En utilisant la définition et en s'inspirant de l'exemple précédent, calculer alors la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{600} (0{,}000625x^2 - 0{,}25\,x + 125)\,\mathrm{d}x$$

Conclure quant au problème posé.